第17講　式と証明(2)

【基礎確認事項】

［1］　2次方程式の判別式と解と係数の関係

□複素数の範囲で考えることにより，2次方程式の**解の公式**は以下.

> a，b，c が実数のとき，2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

□$D=b^2-4ac$ を**判別式**といい，この D の符号で解の種類を判別する.

> $D\geqq 0 \iff$ 実数解をもつ　　特に $D>0 \iff$ 異なる2つの実数解をもつ
>
> $D=0 \iff$ 1つの実数解（重解）をもつ
>
> $D<0 \iff$ 異なる2つの虚数解をもつ

□特に，2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は　$x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$ であり，またこの2次方程式の判別式を D とすると，解の判別は $\dfrac{D}{4}=b'^2-ac$ の符号で行える.

□2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解を α，β とすると

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{b^2-D}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

であることより

> $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

が成り立つ．これを**解と係数の関係**という.

□これは，$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ と変形できることにより，右辺を展開し，係数比較することによっても得られる.

□特に $a=1$ のときは　$\alpha+\beta=-b$，$\alpha\beta=c$　となる.

□また，このことから次のことがいえる.

> $\alpha+\beta=p$，$\alpha\beta=q$ のとき，α，β は2次方程式　$x^2-px+q=0$　の2解

⇒　C&U 1

［2］　高次方程式

□一般に3次以上の方程式を高次方程式という．高次方程式は必ずしも解けるとは限らないが，因数分解，因数定理（組立除法）などを利用することで1次または2次の積の形で因数分解をすることができれば，解ける．また，複2次式や相反式など，置き換えや特殊な変形をすることで解くことができる場合もある.

□複素数の範囲においては，m 重解を m 個の解と数えるとすると，n 次方程式には n 個の解が存在する.

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

□また，実数係数の n 次方程式が虚数解をもてば，それと共役な虚数解も必ずもつことが知られている．

例　$3+\sqrt{2}\,i$ を解にもつ実数係数の 2 次方程式は，$3-\sqrt{2}\,i$ も解にもつ．

□ 2 次方程式同様，3 次方程式においても解と係数の関係を考えることができる．
3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の 3 つの解を α，β，γ とすると，
$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ と変形し，係数比較することにより

$\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}$，$\alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$ が成り立つ．

⇒　C&U ２

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

【CHECK & UP】

1 2 次方程式 $3x^2+3x-6=0$ の 2 解を α，β とするとき，次の各式の値を求めよ．

(1) $\alpha^2+\beta^2$

(2) $(\alpha-\beta)^2$

(3) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$

2 次の方程式を複素数の範囲で解け．

(1) $x^3=1$

(2) $x^3-x^2-3x-1=0$

(3) $x^4-7x^3+14x^2-7x+1=0$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 17 講　式と証明(2)

1　(1)　実数 s，t が $s+t=p$，$st=3$ を満たすとき，実数 p のとり得る値の範囲を求めよ．

(2)　2 次方程式 $x^2-(k+6)x+6=0$ の解がすべて整数となるような定数 k の値と，そのときの整数解をすべて求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　3次方程式 $x^3-(a-1)x^2+(b-2)x+5=0$　……①　の1つの解が $1+2i$ であるとき，定数 a，b の値と他の解を求めよ．ただし，a，b は実数とする．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　実数 x, y, z が $x+y+z=5$, $xy+yz+zx=4$, $(x+y)(y+z)(z+x)=20$ を満たすとき，$x^3+y^3+z^3$ の値を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 17 講　式と証明(2)

(1)　A，B の 2 人が同じ 2 次方程式 $x^2+bx+c=0$ を解いたが，A は 1 次の係数を，B は定数項を写し間違って計算したため，A は $x=-2,\ 6$，B は $x=-2\pm\sqrt{2}\,i$ という解を得た．このとき $b=$ [ア]，$c=-$[イウ] であり，正しい解は $x=-$[エ]，[オ] である．

(2)　3 次方程式　$x^3-2x^2+(a-3)x+a=0$　……①　が 2 重解をもつときの定数 a の値を求めたい．$x^3-2x^2+(a-3)x+a=(x+$[カ]$)(x^2-$[キ]$x+a)$ より①の解の 1 つは $x=-$[カ] である．x^2-[キ]$x+a=0$　……②　が $x=-$[カ] を解にもつとき，$a=-$[ク] である．このとき②は $x=-$[カ] を重解にもつことはなく，題意を満たす．また，②が重解をもつとき，$a=\dfrac{[ケ]}{[コ]}$ であり，このとき②の重解は $x=-$[カ] ではなく題意を満たす．したがって求める a の値は

$a=-$[ク]，$\dfrac{[ケ]}{[コ]}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第17講　式と証明(2)

【CHECK & UP】

1　$3x^2+3x-6=0$ の2解が α，β であることより，解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=-\frac{3}{3}=-1,\quad \alpha\beta=\frac{-6}{3}=-2$$

(1)　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-1)^2-2\cdot(-2)=\mathbf{5}$

(2)　$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-1)^2-4\cdot(-2)=\mathbf{9}$

(3)　$\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}=\dfrac{5}{-2}=\boldsymbol{-\dfrac{5}{2}}$

> 解と係数の関係は，2次方程式の解を扱う問題を解決する手段として最重要項目の1つである．方程式を解いて解を出すことなく解を利用できる，また「和」と「積」を強く意識することがこの問題の目的である．それが，ゆくゆくは解と係数の関係の「逆」としての利用につながる．

2　(1)　$x^3=1$　より　$x^3-1=0$　$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x=1,\ x^2+x+1=0$　　よって　$\boldsymbol{x=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}}$

> (1)　$x^3=1$ を満たす x，すなわち1の立方根のうち虚数のものは「ω（オメガ）」として知っている人も多いであろう．

(2)　$x^3-x^2-3x-1=0$　より

$(x+1)(x^2-2x-1)=0$

$x=-1,\ x^2-2x-1=0$

よって　$\boldsymbol{x=-1,\ 1\pm\sqrt{2}}$

1	−1	−3	−1	−1
	−1	2	1	
1	−2	−1	0	

> 3次以上の式において因数分解をする手段の筆頭は「組立除法」である．確実に使いこなせるように．

(3)　$x=0$ は $x^4-7x^3+14x^2-7x+1=0$ の解ではない．

よって与えられた方程式を x^2 で割ると，

$$x^2-7x+14-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+14=0$$

$x+\dfrac{1}{x}=t$ とおくと　$t^2-7t+12=0$

$(t-3)(t-4)=0$　　よって　$t=3,\ 4$

$t=3$ のとき　$x+\dfrac{1}{x}=3$　　$x^2-3x+1=0$　　$\boldsymbol{x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}}$

$t=4$ のとき　$x+\dfrac{1}{x}=4$　　$x^2-4x+1=0$　　$\boldsymbol{x=2\pm\sqrt{3}}$

> (3)　組立除法を試みたとき，候補に挙げられる値ではすべて失敗する，という問題の代表例がこの問題である．
> 　降べきの順に並べたとき，係数が左右対称になる式，いわゆる「相反式」に関する方程式である．その対称性を利用した解法をこの問題を通じて学んでおきたい．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 17 講　式と証明(2)

1　(1)　実数 s，t が $s+t=p$，$st=3$ を満たすとき，実数 p のとり得る値の範囲を求めよ．

(2)　2 次方程式 $x^2-(k+6)x+6=0$ の解がすべて整数となるような定数 k の値と，そのときの整数解をすべて求めよ．

(1)　$s+t=p$，$st=3$ より，s，t は 2 次方程式 $x^2-px+3=0$ の 2 解である．

2 解 s，t が実数より　判別式を D とすると

$D=p^2-12\geqq 0$　　したがって　$\boldsymbol{p\leqq -2\sqrt{3}}$**，**$\boldsymbol{2\sqrt{3}\leqq p}$

(2)　2 次方程式　$x^2-(k+6)x+6=0$　の 2 解を α，β（$\alpha\leqq\beta$）とする．

解と係数の関係より　$\alpha+\beta=k+6$，$\alpha\beta=6$

よって，$k=\alpha+\beta-6$ であり，2 解 α，β がともに整数のとき k も整数である．

また，$\alpha\beta=6$ より　$(\alpha,\ \beta)=(1,\ 6)$，$(2,\ 3)$，$(-3,\ -2)$，$(-6,\ -1)$ に限られる．

このときそれぞれ $k=1$，-1，-11，-13

したがって，$\boldsymbol{k=1}$ のとき　解は $\boldsymbol{x=1,\ 6}$　　$\boldsymbol{k=-1}$ のとき　解は $\boldsymbol{x=2,\ 3}$

$\boldsymbol{k=-11}$ のとき　解は $\boldsymbol{x=-3,\ -2}$　　$\boldsymbol{k=-13}$ のとき　解は $\boldsymbol{x=-6,\ -1}$

2　3 次方程式 $x^3-(a-1)x^2+(b-2)x+5=0$　……①　の 1 つの解が $1+2i$ であるとき，定数 a，b の値と他の解を求めよ．ただし，a，b は実数とする．

$x^3-(a-1)x^2+(b-2)x+5=0$ に　$x=1+2i$ を代入して

$(1+2i)^3-(a-1)(1+2i)^2+(b-2)(1+2i)+5=0$

$1+6i+12i^2+8i^3-(a-1)(-3+4i)+(b-2)+2(b-2)i+5=0$

$1+6i-12-8i+3(a-1)-4(a-1)i+(b+3)+(2b-4)i=0$

$(3a+b-11)+(-4a+2b-2)i=0$

a，b が実数より　$3a+b=11$，$-2a+b=1$　　したがって　$\boldsymbol{a=2,\ b=5}$

このとき①より　$x^3-x^2+3x+5=0$　　$(x+1)(x^2-2x+5)=0$　　$x=-1,\ 1\pm 2i$　より

他の解は　$\boldsymbol{-1,\ 1-2i}$

【別解】　実数係数の 3 次方程式　$x^3-(a-1)x^2+(b-2)x+5=0$ が

$x=1+2i$ を解にもつとき，$x=1-2i$ も解にもつ．もう 1 解を α とすると

3 次方程式の解と係数の関係より

$(1+2i)+(1-2i)+\alpha=a-1$　……①

$(1+2i)(1-2i)+(1-2i)\alpha+\alpha(1+2i)=b-2$　……②

$(1+2i)(1-2i)\alpha=-5$　……③

③より　$5\alpha=-5$　よって　$\alpha=-1$

このとき①より　$a=\alpha+3=2$　　②より　$b=2\alpha+7=5$

したがって　$\boldsymbol{a=2,\ b=5}$　　他の解　$\boldsymbol{1-2i,\ -1}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　実数 x，y，z が $x+y+z=5$，$xy+yz+zx=4$，$(x+y)(y+z)(z+x)=20$ を満たすとき，$x^3+y^3+z^3$ の値を求めよ．

$x+y+z=5$　……①　　$xy+yz+zx=4$　……②　　$(x+y)(y+z)(z+x)=20$　……③

①と③より　$(5-z)(5-x)(5-y)=20$

$125-25(x+y+z)+5(xy+yz+zx)-xyz=20$

これと①，②より　$125-25\cdot5+5\cdot4-xyz=20$　よって　$xyz=0$　……④

①，②，④より　x，y，z は 3 次方程式　$t^3-5t^2+4t=0$　の 3 解である．

$t(t^2-5t+4)=0$

$t(t-1)(t-4)=0$

$t=0,\ 1,\ 4$

したがって，$x^3+y^3+z^3=0^3+1^3+4^3=\mathbf{65}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第17講　式と証明(2)

(1)　A，Bの2人が同じ2次方程式 $x^2+bx+c=0$ を解いたが，Aは1次の係数を，Bは定数項を写し間違って計算したため，Aは $x=-2,\ 6$，Bは $x=-2\pm\sqrt{2}\,i$ という解を得た．このとき $b=$ [ア]，$c=-$[イウ] であり，正しい解は $x=-$[エ]，[オ] である．

(2)　3次方程式　$x^3-2x^2+(a-3)x+a=0$　……①　が2重解をもつときの定数 a の値を求めたい．$x^3-2x^2+(a-3)x+a=(x+$[カ]$)(x^2-$[キ]$x+a)$ より①の解の1つは $x=-$[カ] である．x^2-[キ]$x+a=0$　……②　が $x=-$[カ] を解にもつとき，$a=-$[ク] である．このとき②は $x=-$[カ] を重解にもつことはなく，題意を満たす．また，②が重解をもつとき，$a=\dfrac{[ケ]}{[コ]}$ であり，このとき②の重解は $x=-$[カ] ではなく題意を満たす．したがって求める a の値は

$a=-$[ク]，$\dfrac{[ケ]}{[コ]}$ である．

(1)　方程式と解の関係において，1次の係数に関係するのは2解の和，定数項に関係するのは2解の積である．よってAが出した2解は積が正しく，Bが出した2解は和が正しい．
よって，もとの方程式の2解を α，β とすると

$$\alpha\beta=-2\cdot6=-12,\ \alpha+\beta=(-2+\sqrt{2}\,i)+(-2-\sqrt{2}\,i)=-4$$

より，α，β を2解にもつ2次方程式の1つは　$x^2+4x-12=0$　である．
これと $x^2+bx+c=0$ を比較することにより，$b=\mathbf{4}$，$c=\mathbf{-12}$　である．
また，正しい解は　$(x+6)(x-2)=0$　より　$x=\mathbf{-6,\ 2}$　である．

(2)　$x^3-2x^2+(a-3)x+a=(x+\mathbf{1})(x^2-\mathbf{3}x+a)=0$ より，①の解の1つは　$x=\mathbf{-1}$　である．

②すなわち $x^2-\mathbf{3}x+a=0$ が $x=\mathbf{-1}$ を解にもつとき，代入して　$a=\mathbf{-4}$
このとき　②より　$x^2-3x-4=0$　　この2解は $x=-1,\ 4$ より　②は $x=-1$ を重解にもたず，適する．

$x^2-3x+a=0$ が重解をもつとき，判別式を D とすると　$D=9-4a=0$　　$a=\mathbf{\dfrac{9}{4}}$

このとき　②より　$x^2-3x+\dfrac{9}{4}=0$　　よって　$x=-1$ ではない重解 $x=\dfrac{3}{2}$ をもち，適する．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。